

Θεωρία Αριθμών

20/10/15

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$$

Για $n=1$ $1=1^2$ ισχύει

Για $n=2$ $4=2^2$ ισχύει

$$\sum_{i=1}^k (2i-1) = k^2 \quad \text{ισχύει επίσης}$$

$$\sum_{i=k+1}^{k+1} (2i-1) = (k+1)^2 \quad \text{διαφορ}$$

$$\left(\sum_{i=1}^k (2i-1) \right) + 2(k+1) - 1 = k^2 + 2k + 2 - 1 = (k+1)^2$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = \prod_{i=1}^n i$$

$$0! = 1$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad \binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$$

$$\binom{n!}{i!(n-i)!} \text{ Differenz } \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} + \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-1-i+1)!} = \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}$$

$$\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{n-i}\right) = \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} \cdot \frac{n-i+1}{i(n-i)} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$$(\alpha + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \alpha^{n-i} \cdot b^i$$

$$n=1 \quad (\alpha + b)^1 = \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} \alpha^{1-i} \cdot b^i = \binom{1}{0} \alpha^1 b^0 + \binom{1}{1} \alpha^0 b^1$$

Annahme für Induktion für $n \geq k$

$$(\alpha + b)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \alpha^{k-i} \cdot b^i$$

$$\text{Annahme: } (\alpha + b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \alpha^{k+1-i} \cdot b^i$$

$$(\alpha + b)^{k+1} = (\alpha + b)^k (\alpha + b) = \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \alpha^{k-i} \cdot b^i \right) (\alpha + b) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \alpha^{k+1-i} \cdot b^i +$$

$$+ \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \alpha^{k-i} \cdot b^{i+1} = \alpha^{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i-1} \alpha^{k+1-i} \cdot b^i + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \alpha^{k-i} \cdot b^{i+1} + b^{k+1} =$$

$$j = i+1 \quad \alpha^{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i-1} \alpha^{k+1-i} \cdot b^i + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i-1} \alpha^{k+1-i} \cdot b^i + b^{k+1} = \alpha^{k+1} + \sum_{i=1}^k \left[\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i-1} \right] \alpha^{k+1-i} \cdot b^i + b^{k+1}$$

$$\sum_{i=1}^k \binom{k}{i-1} \alpha^{k+1-i} \cdot b^i = \alpha^{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k+1}{i} \alpha^{k+1-i} \cdot b^i + b^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \alpha^{k+1-i} \cdot b^i = \textcircled{A}$$

$$(a-b)^n = (a+(-b))^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i$$

Παρατήρηση

Έστω p πρώτος, τότε $\binom{p}{i}$ διαιρείται από το p $\boxed{i \neq 0, p}$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdots p}{1 \cdot 2 \cdots i \cdot 1 \cdot 2 \cdots (p-i)} \text{ φυσικός} = p \frac{1 \cdot 2 \cdots (p-1)}{1 \cdot 2 \cdots i \cdot 1 \cdot 2 \cdots (p-i)} = \textcircled{*}$$

Αν υπάρχουν α_1, α_2 ώστε $\alpha_1 \in \{1, \dots, i\}$ ώστε $p \nmid \alpha_1 \alpha_2$
 $\alpha_2 \in \{1, \dots, p-i\}$

Τότε $\textcircled{*} = \frac{1 \cdot 2 \cdots (p-1)}{1 \cdot 2 \cdots i \cdot 1 \cdot 2 \cdots (p-i)}$. Τότε $p \nmid \alpha_1 \alpha_2$ θα ήταν σωστός!
 $\uparrow$ χωρίς α_1, α_2

$$(a-b)^p = \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{p}{i} a^{p-i} \cdot b^i = a^p + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} a^{p-i} \cdot b^i + b^p = a^p + b^p + p(\text{άθροισμα})$$

π.χ. Να δείξετε ότι $4x^2 + 2$ δεν διαιρείται $\forall n \geq 0$
 ισχύει για $n=0, 1, 2$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k$.

Θα το δείξουμε για $n=k+1$

$(k+1)^2 + 2$ δεν (θέλουμε) να διαιρείται $k+1$ το 4.

Με εν άτοκον σπασμό!

$$\text{Υποθέτουμε ότι } \frac{4/(k+1)^2 + 2}{4/-4k} \Rightarrow \frac{4/(k+1)^2 + 2 \cdot 4k}{k^2 + 2k + 1 + 2 - 4k} = \frac{4/(k-1)^2 + 2}{4/(k-1)^2 + 2} \text{ δεν ισχύει}$$

Με την αρχή του ισχυρίσματος επαγωγής.

Έστω $P(x)$ μια πρόταση η οποία ορίζεται για $n \geq a$ ή a και $b \in W$. $a \leq b$. Αν ισχύουν $P(a)$, $P(a+1)$, $P(b)$ αληθείς
 Για $k > b$, αν η $P(k)$ είναι αληθείς για $a \leq k$ τότε $P(k)$
 αληθείς. Τελικά θα έχουμε $P(x)$ αληθείς για $n \geq a$

Ισχύει ότι: Απλή Μαθηματική Επαγωγή είναι ισοδύναμη με
 την ισχυρή Μαθηματική Επαγωγή (χωρίς απόδειξη)

Πείραξη: Κάθε φυσικός > 1 διαίρεται από κάποιο πρώτο.

Απόδειξη: Με ισχυρή Μαθηματική Επαγωγή
 Για $n=2,3$ ισχύει 2,3 πρώτοι. Υποθέτουμε ότι ισχύει
 για όλα τα φυσικά $< k$. Θα το δείξουμε για k .

Είναι το k πρώτος $\begin{cases} \rightarrow \text{Ναι, τελειώσαμε!} \\ \rightarrow \text{Όχι, τότε γράφω } k = a \cdot b \text{ ή } a, b < k. \end{cases}$
 Άρα αφού $a < k$, το a διαίρεται από
 πρώτο. Άρα $a | k$ και $a | k \Rightarrow a | k$.
 Άρα ο k διαίρεται από πρώτο.

Πείραξη: Κάθε φυσικός > 1 γράφεται σαν γινόμενο πρώτων, μοναδικά
 χωρίς να λαμβάνεται υπόψη το 1 τη σειρά.

π.χ. $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$

Απόδειξη
 Με ισχυρή μαθηματική επαγωγή. Ισχύει για $n=2,3,4,5,6$. Υποθέτουμε
 ότι ισχύει για όλα $< k$. Θα το δείξουμε για k . Αν k πρώτος, τότε
 Αλλιώς $k = a \cdot b$ ή $a, b < k$. Άρα a και b γράφονται μοναδικά σαν
 γινόμενα πρώτων. Άρα και ο k .

Πρωτογενής ανάλυση:

$$\begin{array}{r} 126 \div 2 \\ 63 \div 3 \\ 21 \div 3 \\ 7 \div 7 \\ 1 \end{array}$$

$$126 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^1$$

πρωτογενής ανάλυση

Έστω $P(n)$ μία πρόταση η οποία ορίζεται για $n \geq a$ με $a \in \mathbb{N}$. $a \leq b$. Αν ισχύουν $P(a), P(a+1), P(b)$ αληθείς
 Για $k > b$ αν η $P(k)$ είναι αληθής για $a \leq k \leq b$ τότε $P(k)$
 αληθής. Τελικά θα έχουμε $P(n)$ αληθής για $n \geq a$

Ισχύει ότι: Απλή Μαθηματική Επαγωγή είναι ισοδύναμη με
 την ισχυρή Μαθηματική Επαγωγή (χωρίς απόδειξη)

Πείραγμα: Κάθε φυσικός > 1 διαγράφει από κάποιο πρώτο.

Απόδειξη: Με ισχυρή Μαθηματική Επαγωγή
 Για $n=2,3$ ισχύει 2,3 πρώτοι. Υποθέτουμε ότι ισχύει
 για όλους τους φυσικούς $< k$. Θα το δείξουμε για k .

Είναι το k πρώτος $\begin{cases} \text{Ναι, τελειώσαμε!} \\ \text{Όχι, άρα γράφεται } k=a \cdot b \text{ με } a, b < k. \end{cases}$
 Άρα αφού $a < k$, το a διαγράφει από
 πρώτο. Άρα και για k με $a|k \Rightarrow p|k$.
 Άρα ο k διαγράφει από πρώτο.

Πείραγμα: Κάθε φυσικός > 1 γράφεται σαν γινόμενο πρώτων, μοναδικά
 χωρίς να ληφθούν υπόψη τα 1 τη σειρά.

π.χ. $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$

Απόδειξη
 Με ισχυρή μαθηματική επαγωγή. Ισχύει για $n=2,3,4,5,6$. Υποθέτουμε
 ότι ισχύει για όλους $< k$. Θα το δείξουμε για k . Αν k πρώτος, τότε
 Αλλιώς $k=a \cdot b$ με $a, b < k$. Άρα a και b γράφεται μοναδικά σαν
 γινόμενα πρώτων. Άρα και ο k .
 Πρωτογενής ανάλυση:
$$\begin{array}{r} 126 \overline{) 2} \\ 63 \overline{) 3} \\ 21 \overline{) 3} \\ 7 \overline{) 7} \end{array}$$
 $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$
 πρωτογενής ανάλυση

π.χ. Να δείξετε ότι $5/2^{4n+2} + 1$

Για $n=0$ 2^2+1 ισχύει

Για $n=1$ $2^6+1=65$ ισχύει

Υποθέτουμε ότι ισχύει για k . Θα το αποδείξουμε για $k+1$.

Θέλουμε $5/2^{4(k+1)+2} + 1 = 2^{4k+4+2} + 1 = 2^4 \cdot 2^{4k+2} + 1$

$$5/2^4(2^{4k+2}+1) = \frac{2^4 \cdot 2^{4k+2} + 2^4 - 2^4 + 1}{k+5} \quad \text{όχι διαφέρει τί το 5}$$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^{n-i} \cdot 1^i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$$

$15/3n^5 + 5n^3 + 7n$ για $n \geq 0$

$n=0$ $15/0$

$n=1$ $15/3 \cdot 1 + 5 + 7 = 15$ ισχύει

Υποθέτουμε για $n=k$

$15/3k^5 + 5k^3 + 7k$

Θέλουμε $15/3(k+1)^5 + 5(k+1)^3 + 7(k+1) =$

$3(k^5 + \sum_{i=1}^4 \binom{5}{i} k^{5-i} \cdot 1^i + 1) + 5(k^3 + \sum_{i=1}^2 \binom{3}{i} k^{3-i} \cdot 1^i + 1) + 7(k+1)$

5,3 πρώτοι. Άρα σύμφωνα με την παρατήρηση $\frac{3 \cdot 5(\dots)}{15} + \frac{5 \cdot 3(\dots)}{15} +$

$\frac{3+5+7}{15} \Rightarrow$ τί το 15

Βρείτε όλα τα ακέραια n ώστε $n+1/n^2+1$

$$\frac{n+1}{n^2+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2-n = n(n+1)$$

Έστω p πρώτος $p/n \neq 1 \Rightarrow \frac{p/n(n-1)}{p/n-1} \in \mathbb{Z}$

$$\frac{p/n+1}{p/n} \in \mathbb{Z} \quad \frac{p/n}{p/n+1}$$

$$\frac{p/n+1}{p/n} \in \mathbb{Z} \quad \frac{p/n}{p/n+1}$$

$$N.a.o. \quad n = -3, -2, 0, 1$$